Curva di Lorenz e indice di Gini

Parallelo con la legge di Maxwell-Boltzmann

1. Curva di Lorenz e coefficiente di Gini

La curva di Lorenz ed il coefficiente di Gini sono entrambi degli strumenti statistici tipicamente usati per studiare la distribuzione del reddito o della ricchezza all'interno di una società, ma che possono essere impiegati anche per l'analisi di altre distribuzioni e grandezze; nel seguito, per fissare le idee, si farà esclusivo riferimento alla distribuzione del reddito.
La curva di Lorenz è rappresentata in Fig.1, dove l'ascissa x rappresenta la frazione della popolazione (ordinata per redditi crescenti) che complessivamente gode di una data frazione y (in ordinata) del reddito totale R.
Si ha evidentemente:
- $x = n/N$, $y = R(x)/R$ dove:
- n = numero di individui compresi nella frazione x
- N = numero totale di individui facenti parte della società
- R(x) = reddito complessivo degli individui compresi nella frazione x

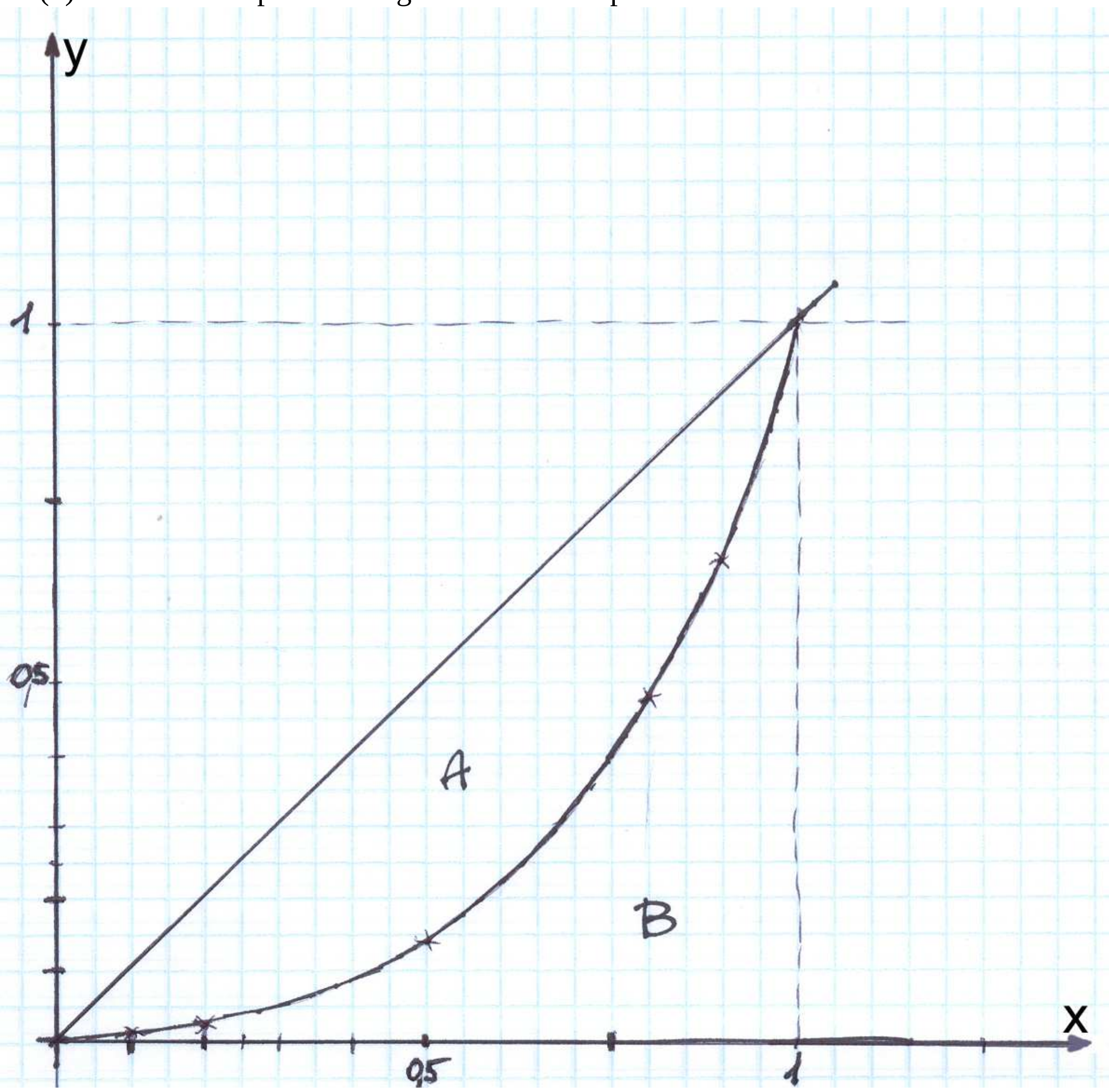

Fig.1: Curva di Lorenz

Sia $y = y(x)$ la funzione generica corrispondente alla curva di Lorenz e $x = x(y)$ la sua funzione inversa; si dovrà avere, evidentemente: $y = 0$ per $x = 0$; $y = 1$ per $x = 1$.
Il reddito pro capite r del membro più ricco della frazione x è dato da: $r = r(x) = dR(x)/dn$
Poiché: $dR(x) = Rdy$; $dn = Ndx$; segue: $r(x) = (R/N)dy/dx$ dove il rapporto R/N corrisponde chiaramente al reddito pro capite medio r_m della società.
In particolare, nel caso ideale di una società perfettamente egualitaria si ha: $r = r_m = \text{cost.}$
e quindi: $dy/dx = \text{cost.} = 1$ e la curva di Lorenz va a coincidere con la retta a 45 gradi.
Nel caso generale tutto ciò che si può dire è che r e quindi dy/dx dovranno avere un andamento monotono e crescente ($d^2y/dx^2 > 0$) (perché gli individui sono stati ordinati per redditi crescenti) e che quindi la curva di Lorenz dovrà giacere interamente al di sotto della retta a 45 gradi raggiungendola solo quando $x = 1$, e quindi $y = 1$.
E' evidente che, quanto più forti saranno le differenze di reddito, tanto più pronunciata sarà la concavità della curva di Lorenz e quindi tanto maggiore l'area A (vedi Fig.1).
Il coefficiente di Gini è definito appunto come il rapporto fra A e l'intera area A+B del triangolo definito dalla retta a 45 gradi:

$G = A/(A + B)$ oppure, in termini percentuali $G = 100\,A/(A + B)$ (1)

Poiché: $A + B = 0{,}5$; $A = 0{,}5 – B$; possiamo anche scrivere:

$G = (0{,}5 – B)/0{,}5 = 1 – 2B$ (1')

Il coefficiente di Gini dipende dunque soltanto dal valore dell'area B sottesa dalla curva di Lorenz; nel caso di perfetta uguaglianza si ha naturalmente $B = 0{,}5$ e quindi $G = 0$.
Se è nota l'espressione matematica della curva di Lorenz (il chè non è solitamente vero) l'area B può essere ottenuta calcolando l'integrale fra 0 ed 1 di $y = y(x)$.
Viene spontaneo fare un parallelo fra la distribuzione del reddito (o della ricchezza) nella popolazione di una società e quella dell'energia nella popolazione delle molecole contenute in un certo volume di gas; come è noto, nel caso di un gas perfetto, quest'ultima è data dalla legge di Maxwell-Boltzmann che ha la seguente espressione:

$(1/N)dn/d\varepsilon = Ae^{-\beta\varepsilon}$ (2)

dove: n = numero di molecole che possiedono una quantità di energia minore o uguale ad ε
N = numero totale di molecole dell'insieme considerato
A, β = costanti
Si tratta di una legge di natura probabilistica, frutto di un ragionamento a priori che permette di calcolare la distribuzione di massima probabilità (e quindi anche di massima entropia), con il massimo assoggettato alle condizioni di: (a) costanza dell'energia totale E dell'insieme; (b) costanza del numero totale N di molecole ([1]).
Tale ragionamento è basato su certe proprietà del cosiddetto "piano delle fasi" in cui ogni molecola entra con le sue coordinate q ed i suoi momenti p ($p = mv$ con m = massa e v = velocità); per una popolazione di molecole aventi tutte la stessa massa, e finché si rimane nell'ambito della fisica classica (non relativistica), i momenti possono essere però sostituiti dalle velocità, dato che c'è di mezzo solo un fattore di scala; per una società si può pensare a qualcosa di equivalente al piano delle fasi associando ad ogni individuo la sua ricchezza q ed il suo risparmio s (nell'unità di tempo); la relazione matematica fra queste due grandezze ($s = dq/dt$) è evidentemente la stessa che lega

[1] Le risultanze sperimentali hanno dimostrato che gli scostamenti possibili nella pratica sono di entità quasi sempre trascurabile; ciò è dovuto, naturalmente, all'elevato valore di N (si pensi che un decilitro d'aria alla pressione atmosferica contiene all'incirca 10^{22} molecole).

coordinate e velocità di una molecola; mi sembra quindi legittimo usare lo stesso procedimento per individuare la distribuzione di massima probabilità, imponendo come condizioni la costanza della ricchezza totale (o del reddito totale) e del numero totale N di individui che compongono la società. Sebbene la formulazione matematica della distribuzione (2) sia diversa, è possibile calcolare, a partire da essa, la corrispondente curva di Lorenz; la cosa non presenta difficoltà concettuali, anche se richiede un procedimento abbastanza laborioso per il quale rimando all'Appendice; qui interessano solo le conclusioni che sono le seguenti:

1) – La curva di Lorenz corrispondente alla (2) (rappresentata in Fig.1) è:

   $y = (1 – x)\ln(1 – x) + x$

   da cui integrando per x fra 0 ed 1 si ottiene:

2) - area B = 0,25 e, per la (1'): G = 1- 2x0,25 = 0,5

ossia in termini percentuali, più comunemente usati: G = 50

Naturalmente le distribuzioni all'interno di una società sono di natura tutt'altro che puramente stocastica; essendo un insieme organizzato di esseri viventi, capaci di concepire dei fini e di perseguirli, la società non è obbligata ad allinearsi sul massimo entropico (o di probabilità) come lo sono le molecole del gas; da tale massimo tuttavia essa può allontanarsi in due sensi diversi, in quello di un aumento (G > 50) o in quello di una diminuzione (G < 50) delle diseguaglianze. Esaminiamo da questo punto di vista i principali fattori non stocastici che influenzano la distribuzione del reddito (o della ricchezza):

- a) chi detiene ricchezza in misura significativa (ed il potere che ne deriva) tende in genere ad accumularne ancora di più, per sè od i suoi discendenti e di solito vi riesce con tutta una serie di metodi di cui testimonia la storia; questo è un fattore, molto forte e generale, che gioca evidentemente in favore delle diseguaglianze.
- b) il ricambio generazionale agisce invece in senso contrario, tanto più quanto maggiore è la prolificità delle famiglie ricche; tuttavia queste hanno spesso messo in opera vari meccanismi volti a compensarne in tutto od in parte gli effetti; è quindi probabile che, nel corso della storia, tali effetti, al netto, siano stati limitati.
- c) sono a lungo esistite ed esistono tuttora organizzazioni di tipo caritativo, quali quelle delle chiese cristiane in Occidente e le *evkaf* nel mondo islamico, che svolgono quindi una funzione di ridistribuzione del reddito; la storia tuttavia ci insegna che i loro effetti sono sempre rimasti relativamente modesti.
- d) c'è infine l'azione dei pubblici poteri, la quale però, storicamente, si è esplicata in ambedue le direzioni; ciò che sappiamo delle prime "civiltà" note alla storia, quale ad esempio quella sumera, dà la sensazione che uno scopo fondamentale dell'organizzazione della società fosse proprio quello di assicurare ad una ristretta elite una frazione molto importante del reddito totale; anche più tardi gli stati hanno spesso influito nello stesso senso, ad esempio per mezzo di imposte regressive quali quelle per testa (il *tributum capitis* dell'impero romano) o per fuoco (cioè per famiglia); e tuttavia è chiaro che, da circa un secolo a questa parte, almeno nei paesi sviluppati, i governi hanno svolto la loro azione nel senso di una ridistribuzione più o meno spinta del reddito.

Nel complesso, in una prospettiva storica di lungo periodo mi sembra ragionevole ritenere che l'effetto netto dei vari fattori non stocastici sia stato a lungo nettamente a favore di una maggiore diseguaglianza, e che solo nell'ultimo secolo, soprattutto grazie alla suddetta azione dei governi, esso si sia annullato o abbia addirittura cambiato di segno.

Negli Stati Uniti il coefficiente di Gini riferito al reddito era di circa 39 nel 1970, anche se è poi salito a poco meno di 47 nel 2005, senza dubbio per effetto delle modifiche nel regime fiscale introdotte da Reagan e poi dal secondo Bush; sempre nel 2005 la Cina, pur così diversa per altri aspetti, aveva un coefficiente di Gini pressoché uguale, mentre i principali paesi europei presentavano valori nell'intorno di 30, indicativi di una distribuzione del reddito alquanto più equa ([2]).
I paesi in via di sviluppo tendono in genere ad avere valori del coefficiente più alti; per esempio Perù e Brasile si situavano nel 2005 fra 55 e 60, Bolivia e Sud Africa oltre 60; ciò tende a confermare l'ipotesi fatta più sopra, secondo la quale vi è stata, soprattutto nell'ultimo secolo e soprattutto nei paesi sviluppati, una consistente riduzione del coefficiente a partire da valori piuttosto elevati; la riduzione del coefficiente di Gini sembra dunque ben correlata con lo sviluppo economico, quanto meno nel lungo periodo.

Appendice

La distribuzione di Maxwell-Boltzmann è data dall'equazione:

$(1/N)dn/d\varepsilon = Ae^{-\beta\varepsilon}$ (1)

dove: n = numero di molecole che possiedono una quantità di energia minore o uguale ad ε
N = numero totale di molecole dell'insieme considerato
A, β = costanti

L'andamento della funzione esponenziale così definita è quello di Fig.2, da cui risulta chiaramente il significato della costante A, che è il valore assunto dalla funzione per $\varepsilon = 0$.
L'area colorata corrisponde chiaramente alla frazione delle N molecole totali che possiede una quantità di energia per molecola pari o inferiore ad ε. Chiamiamo x questa frazione, la cui funzione si ottiene integrando la (1) fra ε e 0:

$x = (1/N)\int(dn/d\varepsilon)d\varepsilon = \int Ae^{-\beta\varepsilon}\,d\varepsilon = A/\beta[1 - e^{-\beta\varepsilon}]$

Per $\varepsilon = \infty$ si deve avere d'altronde n = N, x = 1, da cui A = β e la precedente diventa:

$x = 1 - e^{-\beta\varepsilon}$ (2)

Con riferimento alla Fig.2, l'area compresa fra la retta x =1 e la curva $x = x(\varepsilon)$ data dalla (2) rappresenta evidentemente l'energia totale E del sistema, che può essere calcolata integrando l'ultimo termine della (2) fra 0 ed ∞:

$E = - 1/\beta[e^{-\beta\varepsilon}]^1 + 1/\beta[e^{-\beta\varepsilon}]^0 = 1/\beta$

Rimane così stabilito il significato fisico della costante β (inverso dell'energia totale E).
Ricaviamo ora la funzione inversa della (2), $\varepsilon = \varepsilon(x)$:

$e^{-\beta\varepsilon} = 1 – x; \varepsilon = 1/\beta[- \ln(1 – x)]$ (3)

N.B: ε è sempre positivo perché $(1 – x) < 1$.
L'energia E(x) complessivamente posseduta dalla frazione di molecole x si ottiene integrando la (3):

$E(x) = \int 1/\beta[- \ln(1 – x)]$ fra 0 ed x

$E(x) = 1/\beta[(1 – x)\ln(1 – x) + x]$

Ponendo y = E(x)/E = frazione dell'energia totale posseduta complessivamente dalla frazione di molecole x, e ricordando che. $E = 1/\beta$, otteniamo:

$y = E(x)/E = (1 – x)\ln(1 – x) + x$ (4)

che dà y =1 per x = 1. E' questa la curva di Lorenz cercata (vedi Fig. 1).

[2] Dalla fonte che ho utilizzato (Economist) non risultava chiaro se e in che modo i redditi individuali considerati tenevano conto dello "stato sociale", cioè dei servizi forniti gratuitamente ai cittadini a carico del fisco; è evidente che, a secondo della risposta a questa domanda, i confronti, ad esempio fra Europa e USA, assumerebbero diversi significati.

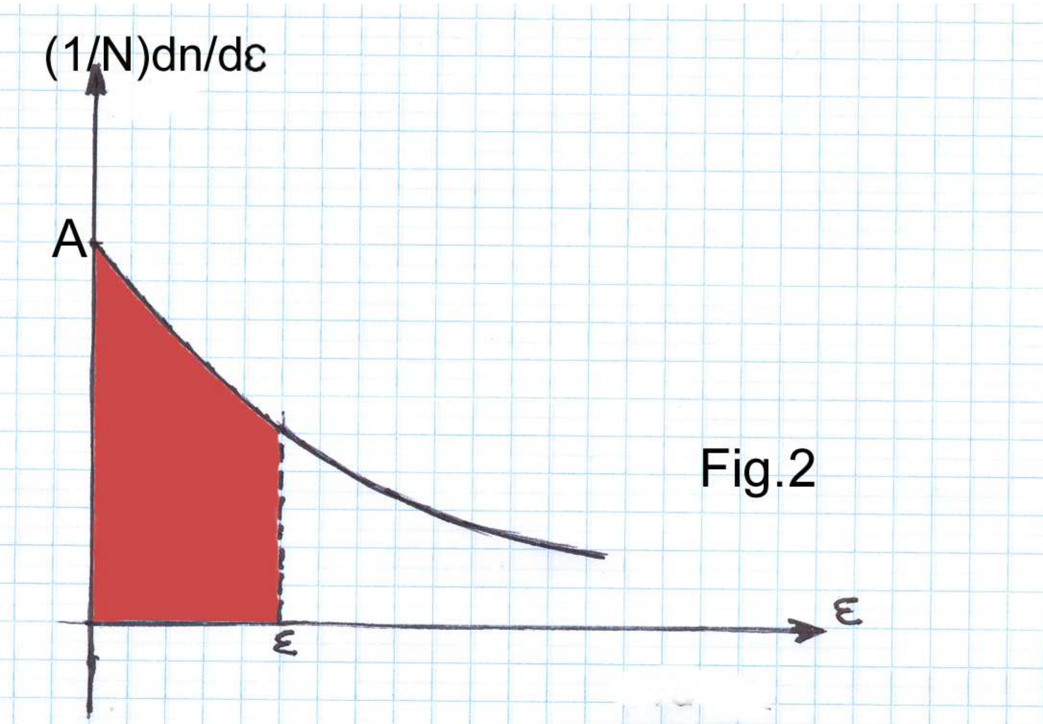

Fig.2

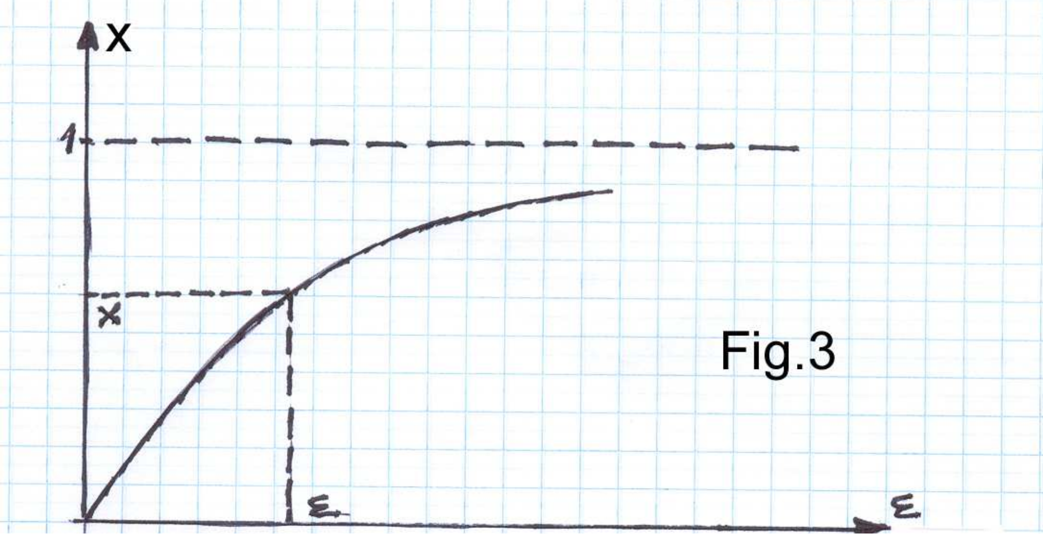

Fig.3

Infine l'area B della Fig.1, che ci serve per calcolare il coefficiente di Gini, corrisponde all'integrale della (4) fra 0 ed 1, pari a:

$[\ln(1 - x).(1 - x)^2/2 + (1 - x)^2/4 + x^2/2]^1 - [\ln(1 - x).(1 - x)^2/2 + (1 - x)^2/4 + x^2/2]^0$

Che dà: B = 0,25 da cui il coefficiente di Gini:

G = 1 – 2B = 0,5 (50 in termini percentuali)

Piero Zattoni, Forlì 2009